

На главную <http://ivativ.narod.ru/index.html>

Иноземцев В.А.

Переходные процессы в RC-цепях при подключении их к генератору прямоугольных импульсов напряжения

RC-цепи присутствуют в явном или неявном виде в любом электронном устройстве. В литературных источниках достаточно полно рассмотрены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики RC-цепей, переходные процессы в RC-цепях при подключении их к источнику постоянного напряжения и отключении от него.

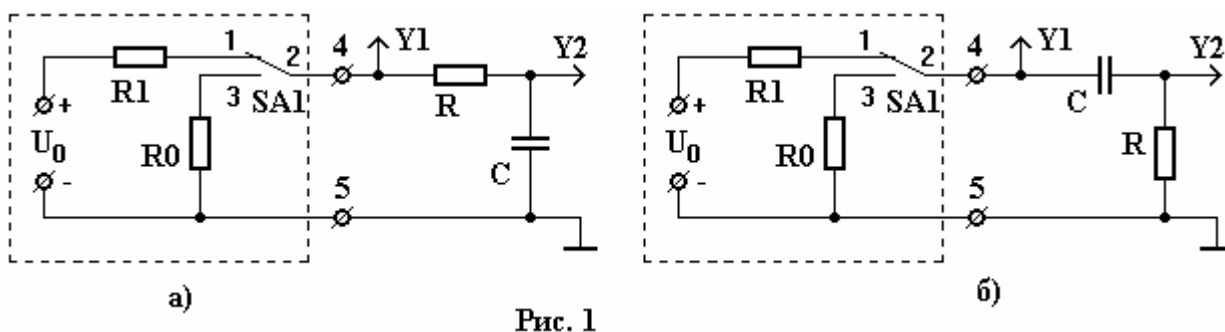


Рис. 1

Остановимся на переходных процессах в RC-цепях при подключении их к источнику прямоугольных импульсов напряжения. Для исследования переходных процессов в RC-цепях собирают экспериментальную установку по схеме, приведенной на рисунке 1. Схема рисунка 1.а) используется для исследования переходных процессов в интегрирующей RC-цепи, а схема рисунка 1.б) – в дифференцирующей. В пунктирном прямоугольнике показана эквивалентная схема генератора прямоугольных импульсов напряжения. R1 это внутреннее сопротивление генератора при наличии импульса напряжения между клеммами 4 и 5 генератора (замкнуты контакты 1 и 2 переключателя SA1), R0 это внутреннее со-

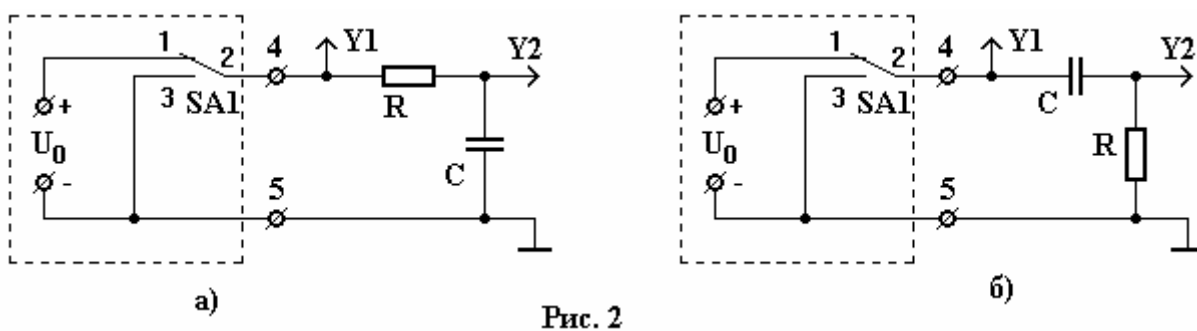


Рис. 2

противление генератора при отсутствии напряжения между клеммами 4 и 5 генератора (замкнуты контакты 2 и 3 переключателя SA1). U_0 это напряжение на зажимах внутреннего источника регулируемого постоянного напряжения. При проведении экспериментальных исследований обычно выполняются условия: $R \gg R_1$, $R \gg R_0$. В этом случае эквивалентная схема генератора прямоугольных импульсов напряжения упрощается (смотри рисунок 2), так как можно пренебречь внутренними сопротивлениями генератора R_0 , R_1 по сравнению с сопротивлением резистора R. На выходе такого генератора (клеммы 4 и 5) получаются прямоугольные импульсы напряжения одной полярности.

Для наблюдения переходных процессов в RC-цепи используют двухканальный электронный осциллограф. Входной сигнал RC-цепи подают на вход Y1, а выходной – на вход Y2.

Рассмотрим, как изменяются с течением времени напряжения на конденсаторе (U_C) и на резисторе (U_R) после подключения RC-цепи к источнику постоянного напряжения (рис. 1). При $t < 0$ $U_R = 0$, $U_C = 0$.

Для любого момента времени из промежутка $0 < t < t_{\text{умн}}$ (когда к RC-цепи приложено постоянное напряжение $U(t) = U_0$) справедливо выражение $U_0 = U_R + U_C$ (1). Напряжение на резисторе равно $U_R = IR$, следовательно $U_0 = IR + U_C$ (2)

Ток, протекающий через резистор, является током зарядки конденсатора $I = \frac{dq}{dt}$;

$$q = CU_C; I = C \frac{dU_C}{dt} \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим $RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0$ (4)

Уравнение (4) это неоднородное дифференциальное уравнение относительно переменной $U_C(t)$ с начальным условием $U_C(0) = 0$.

Общее решение неоднородного уравнения (4.3) есть сумма общего решения однородного уравнения $RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$ (5) и частного решения уравнения (4).

Преобразовав уравнение (5) получим $\frac{dU_C}{U_C} = - \frac{dt}{RC}$ (6).

Возьмём интеграл от левой и правой частей уравнения (6).

$$\ln U_C = - \frac{t}{RC} + A, \text{ где } A - \text{ константа интегрирования.}$$

Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид $U_C = Be^{-t/\tau}$,

где $\tau = RC$ - постоянная времени RC-цепи, $B = e^A$ - константа.

Частным решением уравнения (4) является $U_C = U_0$.

Общее решение уравнения (4) будет иметь вид $U_C(t) = U_0 + Be^{-t/\tau}$ (7)

Для определения константы B учтём, при $t=0$ $U_C(0) = 0$:

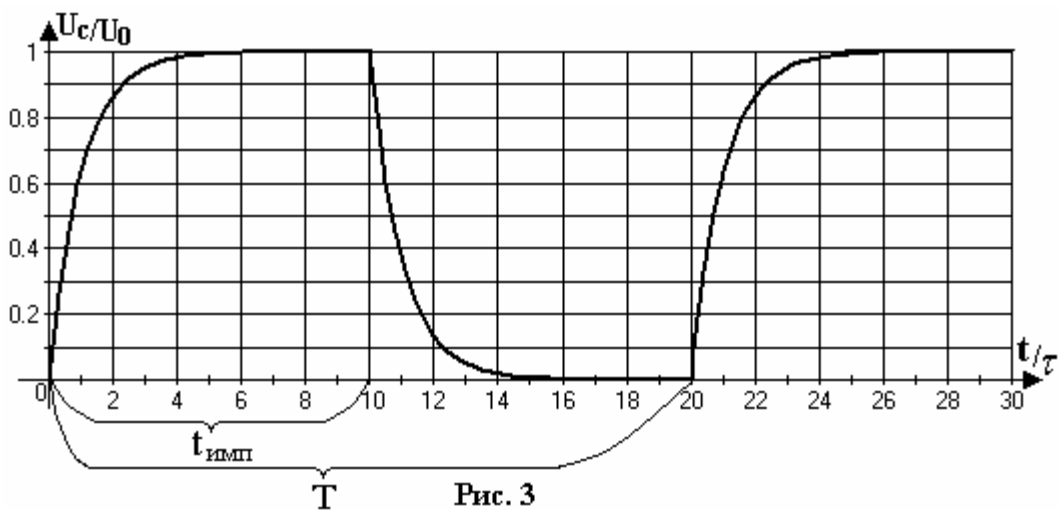
$$0 = U_0 + B \Rightarrow B = -U_0.$$

Таким образом, при $0 \leq t \leq t_{\text{умн}}$:

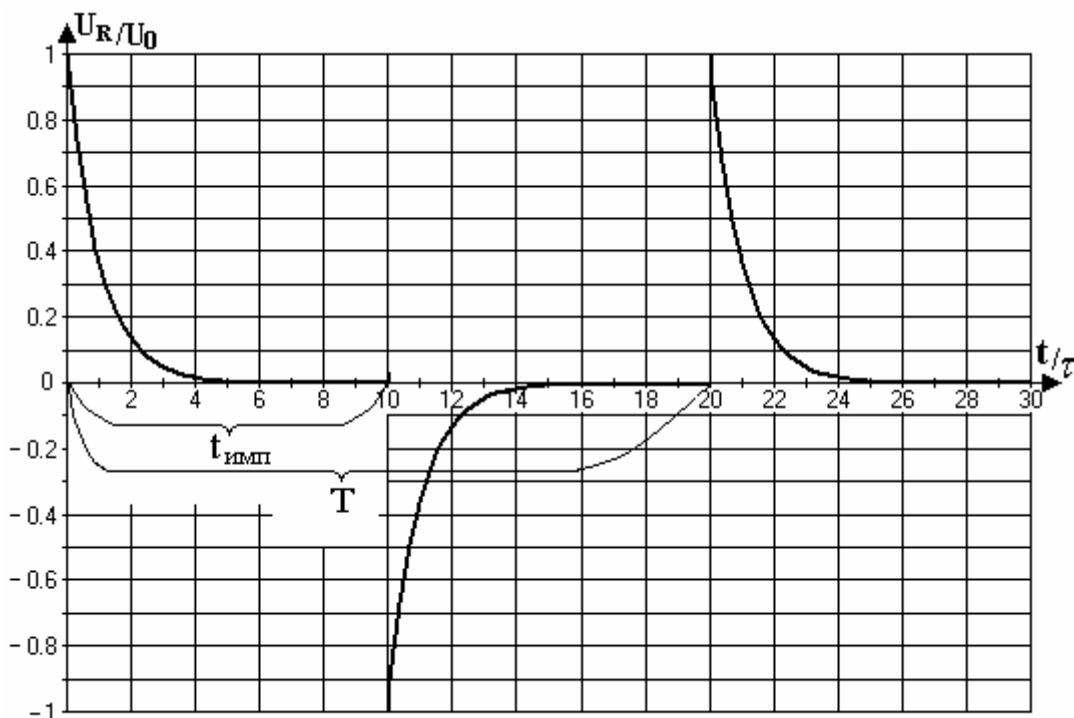
$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (8), \quad U_R(t) = IR = U_0 - U_C = U_0 e^{-t/\tau} \quad (9)$$

Выражение $U_C(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})$ описывает закон изменения напряжения на конденсаторе с течением времени после подключения RC-цепи в момент времени $t=0$ к источнику постоянного напряжения. $U_C(t)$ - это напряжение на конденсаторе в момент времени t при условии, что в момент времени $t=0$ конденсатор был разряжен и начал заряжаться через резистор сопротивлением R от источника, на зажимах которого поддерживается постоянное напряжение U_0 . Из выражения (8) следует, что после подачи на вход RC-цепи постоянного напряжения U_0 напряжение U_C на конденсаторе нарастает от нуля, асимптотически приближаясь к постоянному уровню U_0 (рис. 3). Замедление зарядки конденсатора с течением времени объясняется тем, что с ростом напряжения U_C уменьшается

напряжение $U_R = U_0 - U_C$, приложенное к резистору R, и, следовательно, уменьшается ток зарядки конденсатора $I = U_R / R$.



Выражение $U_R(t) = IR = U_0 - U_C = U_0 e^{-t/\tau}$ описывает закон изменения напряжения на резисторе с течением времени после подключения RC-цепи в момент времени $t=0$ к источнику постоянного напряжения. Из выражения (9) следует, что напряжение $U_R = U_0 - U_C$ вначале скачкообразно достигает значения U_0 , а затем экспоненциально уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю (рис. 4).



Увеличение постоянной времени $\tau = RC$ ведёт к замедлению роста напряжения U_C и спада напряжения U_R . Если бы входное напряжение оставалось равным U_0 бесконечно долго, то при $t \rightarrow \infty$ напряжение $U_C \rightarrow U_0$, напряжение $U_R \rightarrow 0$.

Найдём значения напряжений U_C и U_R , достигнутые к моменту окончания импульса, то есть при $t = t_{имп}$ получим $U_C(t_{имп}) = U_0(1 - e^{-t_{имп}/\tau})$ (10), $U_R(t_{имп}) = IR = U_0 - U_C = U_0 e^{-t_{имп}/\tau}$ (11).

Рассмотрим процессы, происходящие после окончания входного импульса, то есть при $t > t_i$ (контакты 1 и 2 ключа SA1 на рисунке 2 разомкнулись, а контакты 2 и 3 замкнулись). При этом $U_0(t) = 0$ и конденсатор разряжается током I через резистор.

$$0 = IR + U_C \Rightarrow RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 .$$

Общее решение этого уравнения: $U_C(t) = Be^{-t/\tau}$ (12)

Константу B найдём, учтя, что при $t = t_{umm}$ значение $U_C(t_{umm})$ определяется формулой (10)

$$Be^{-t_{umm}/\tau} = U_0(1 - e^{-t_{umm}/\tau}) \Rightarrow B = U_0(1 - e^{-t_{umm}/\tau})e^{t_{umm}/\tau} .$$

Итак, при $t > t_{umm}$:

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-t_{umm}/\tau})e^{-(t-t_{umm})/\tau} , (13)$$

$$U_R(t) = IR = -U_C = -U_0(1 - e^{-t_{umm}/\tau})e^{-(t-t_{umm})/\tau} (14)$$

Из выражения (13) следует, что после окончания входного импульса напряжение на конденсаторе экспоненциально уменьшается от значения $U_C(t_{umm})$, достигнутого к окончанию импульса, асимптотически устремляясь к нулю (рисунок 3). Из выражения (14) видим, что напряжение U_R на резисторе в момент $t = t_{umm}$ скачком уменьшается на величину U_0 от достигнутого значения $U_R(t_{umm})$, становясь отрицательным и равным $-U_C$, а далее по экспоненте асимптотически устремляется к нулю (рисунок 4).

На рисунке 3 показана зависимость U_c/U_0 от времени t/τ при подаче на вход RC-цепи прямоугольных импульсов напряжения. Прямоугольные импульсы напряжения имеют амплитуду U_0 , длительность t_{umm} и период следования T . Длительность паузы между импульсами равна $T - t_{umm}$, скважность $Q = T/t_{umm}$. Относительная длительность импульса $t_{omm} = t_{umm}/T$.

Длительность t_{umm} и длительность паузы между импульсами $T - t_{umm}$ выбраны равными 10τ . В таблице приведены значения U_c/U_0 в зависимости от t/τ .

t/τ	0	1	2	3	5	7	10
U_c/U_0	0	0,63212	0,86466	0,95021	0,99326	0,99908	0,99995

За время действия импульса конденсатор заряжается практически до напряжения U_0 , а во время паузы разряжается до нуля.

На рисунке 4 показана зависимость U_R/U_0 от времени t/τ при подаче на вход RC-цепи прямоугольных импульсов напряжения.

Если длительность t_{umm} и длительность паузы между импульсами $T - t_{umm}$ выбраны не очень большими по сравнению с постоянной времени RC-цепи τ , то за время действия импульса конденсатор не успевает зарядиться до напряжения U_0 , а во время паузы разрядиться до нуля.

Рассмотрим, как будут зависеть от времени напряжение на конденсаторе $U_c(t)$ после подключения RC-цепи к источнику прямоугольных импульсов напряжения (рис. 5). Во время второго импульса происходит зарядка конденсатора, уже имевшего исходный заряд

$q(T) = CU_C(T)$, следовательно, к окончанию второго импульса ($t = T + t_{имп}$) заряд и напряжение на конденсаторе будут большими, чем к окончанию первого импульса.

$$U_C(T + t_{имп}) > U_C(t_{имп}).$$

Однако, прирост напряжения на конденсаторе в течение второго импульса будет меньшим, чем в течение первого, так как из-за наличия исходного напряжения $U_C(T)$ ток зарядки конденсатора при действии второго импульса будет меньше, чем при действии первого.

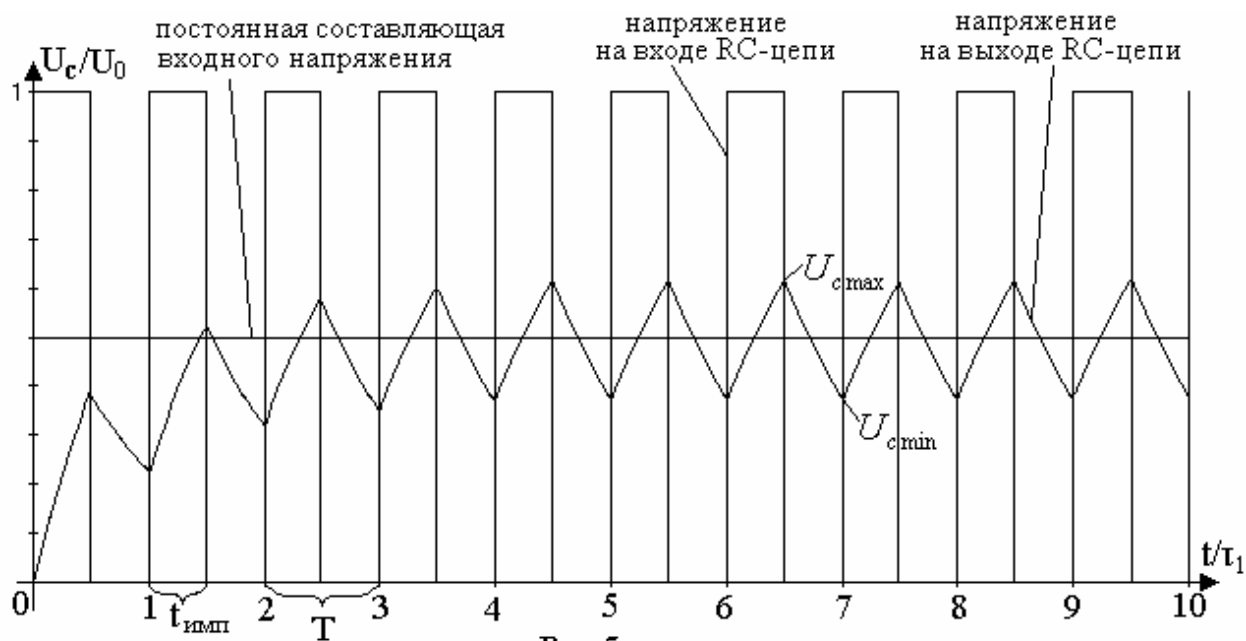


Рис. 5

Таким образом, после подачи на вход RC-цепи последовательности прямоугольных импульсов в течение некоторого времени будет идти переходной процесс, во время действия каждого импульса конденсатор будет подзаряжаться, а во время последующей паузы – частично разряжаться (рисунок 5). С каждым новым периодом прирост напряжения U_C при подзарядке будет уменьшаться, а спад при разрядке – увеличиваться по модулю, пока не наступит установившийся режим, когда увеличение напряжения на конденсаторе за время импульса будет компенсироваться спадом во время паузы. В этом режиме напряжения на конденсаторе и резисторе будут периодически повторяться:

$$U_C(t) = U_C(t + T); U_R(t) = U_R(t + T).$$

Этот режим называется установившимся периодическим режимом, или просто установившимся режимом.

Пусть на вход RC-цепи поступает последовательность прямоугольных импульсов и с начала её поступления прошло столь много импульсов, что имеет место установившийся периодический режим изменений выходных напряжений $U_C(t)$ и $U_R(t)$. Определим вид зависимостей $U_C(t)$ и $U_R(t)$ в этом режиме.

Выражение $U_C(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})$ описывает закон изменения напряжения на конденсаторе с течением времени после подключения RC-цепи в момент времени $t=0$ к источнику постоянного напряжения при условии, что в момент времени $t=0$ конденсатор был разряжен.

Найдем закон изменения напряжения на конденсаторе с течением времени после подключения RC-цепи в момент времени $t=0$ к источнику постоянного напряжения при условии, что в момент времени $t=0$ конденсатор был заряжен до напряжения U_{c0} .

Для определения константы B в уравнении (7) $U_c(t) = U_0 + Be^{-t/\tau}$ учтём, что при $t=0$ $U_c(0) = U_{c0}$

$$U_{c0} = U_0 + B \Rightarrow B = U_{c0} - U_0.$$

Подставив B в уравнение (7), получим $U_c(t) = U_0 - (U_0 - U_{c0})e^{-t/\tau}$ (15).

Данное выражение удобнее представить в виде $U_c(t) = U_{c0} + (U_0 - U_{c0})(1 - e^{-t/\tau})$ (16).

Полученное выражение $U_c(t) = U_{c0} + (U_0 - U_{c0})(1 - e^{-t/\tau})$ описывает закон изменения напряжения на конденсаторе с течением времени после подключения RC-цепи в момент времени $t=0$ к источнику постоянного напряжения при условии, что в момент времени $t=0$ конденсатор был заряжен до напряжения U_{c0} .

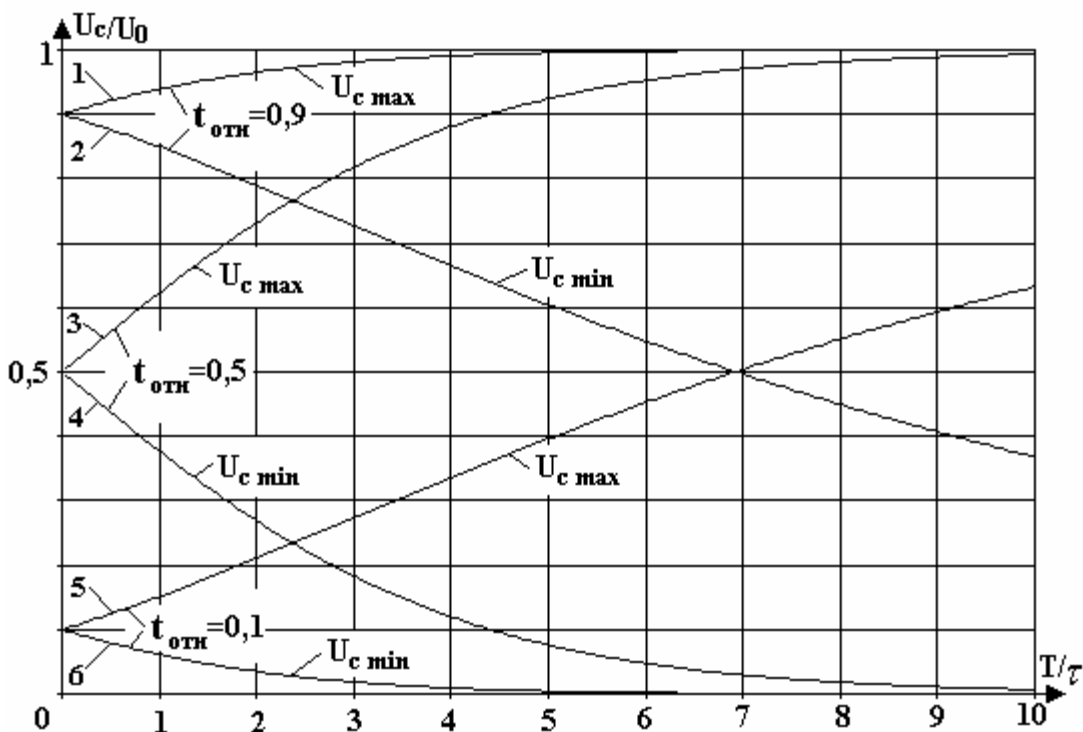


Рис. 6

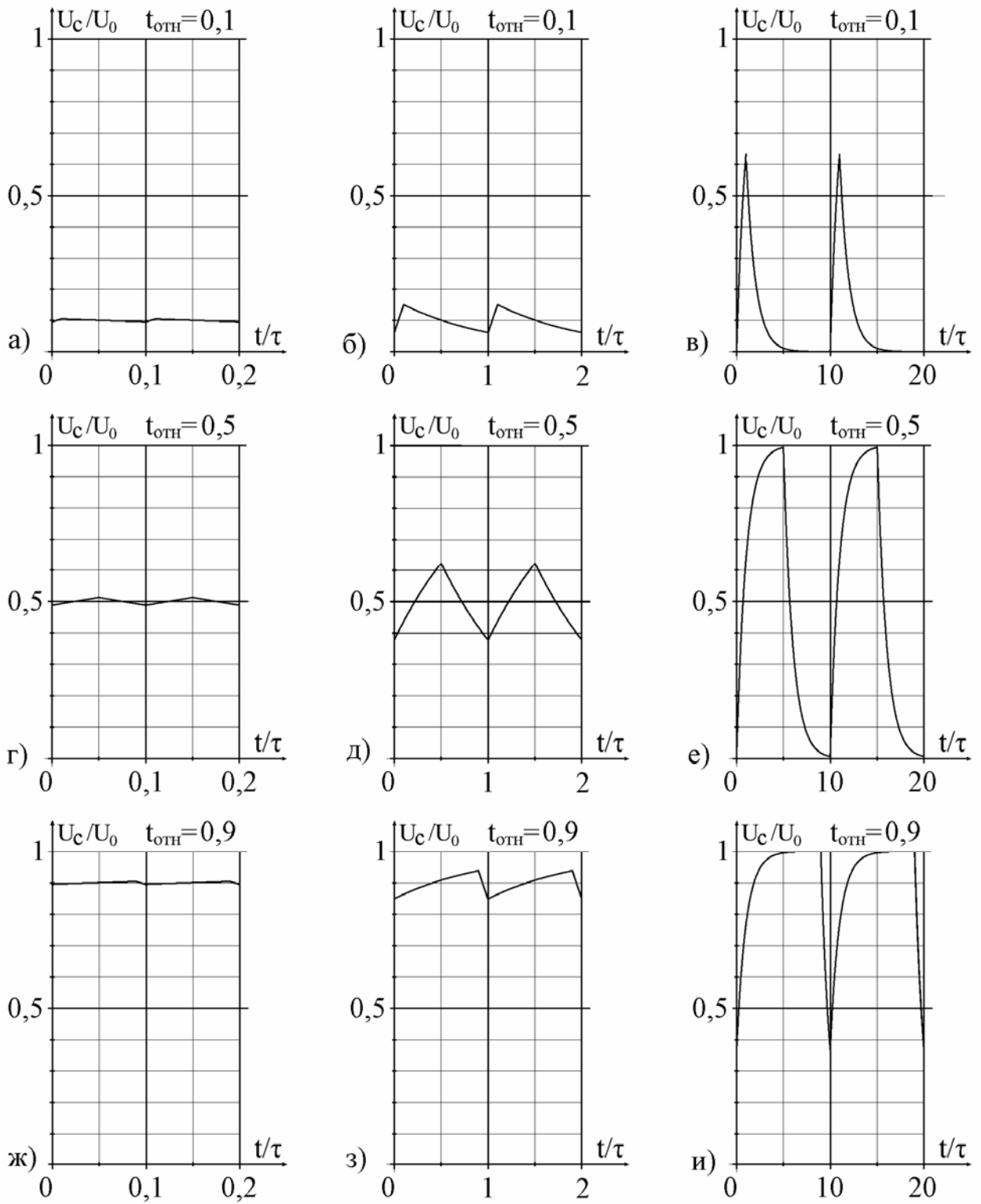
В установившемся периодическом режиме напряжение на конденсаторе в конце периода, то есть к началу следующего импульса, должно быть таким же, как и в начале периода $U_{c \min}(nT) = U_{c \min}((n-1)T)$ (рисунок 5).

В установившемся режиме во время действия импульса напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U_c(t) = U_{c \min} + (U_0 - U_{c \min})(1 - e^{-t/\tau})$ и в момент окончания импульса ($t = t_{\text{имп}}$) будет равно $U_{c \max} = U_{c \min} + (U_0 - U_{c \min})(1 - e^{-t_{\text{имп}}/\tau})$ (17).

Во время паузы, то есть при $t_{\text{имп}} < t < T$, напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U_c(t) = U_{c \max} e^{-(t-t_{\text{имп}})/\tau}$ и к концу паузы достигнет значения

$$U_{c \min} = (U_{c \max} + (U_0 - U_{c \max})(1 - e^{-t_{\text{имп}}/\tau})) e^{-(T-t_{\text{имп}})/\tau} \quad (18).$$

Выразим из последнего уравнения $U_{c \min}$



$$t_{отн} = \frac{t_{имп}}{T}$$

$t_{отн}$ – относительная длительность импульса

$t_{имп}$ – длительность импульса

T – период следования импульсов

Рис. 7

$$U_{C \min} = U_0 \frac{e^{t_{\text{имн}}/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} \quad (19).$$

Учтем, что $t_{\text{имн}} = t_{\text{омн}} T$, и получим выражение для подсчета минимального значения напряжения на конденсаторе RC-цепи достаточно долго подключенной к генератору прямоугольных импульсов напряжения $U_{C \min} = U_0 \frac{e^{t_{\text{омн}} T/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1}$ (20).

В полученном выражении $U_{C \min}$ это минимальное значение напряжения на конденсаторе при наличии на входе RC-цепи прямоугольных импульсов напряжения с относительной длительностью $t_{\text{омн}} = \frac{t_{\text{имн}}}{T}$, T - период следования импульсов, τ - постоянная времени RC-цепи.

Подставив выражение (20) в выражение (17) получим выражение для максимального значения напряжения на конденсаторе в установившемся режиме при наличии на входе RC-цепи прямоугольных импульсов напряжения $U_{C \max} = U_0 - (U_0 - U_0 \frac{e^{t_{\text{омн}} T/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1}) e^{-\frac{t_{\text{омн}} T}{\tau}}$ (21).

На рисунке 6 показаны зависимости $U_{C \min}$ и $U_{C \max}$ от $\frac{T}{\tau}$ для относительных длительностей импульсов $t_{\text{омн}} = 0,1$ (кривые 5 и 6), $t_{\text{омн}} = 0,5$ (кривые 3 и 4) и $t_{\text{омн}} = 0,9$ (кривые 1 и 2).

На рисунке 7 приведены зависимости напряжения на конденсаторе в установившемся режиме от $\frac{t}{\tau}$ для относительных длительностей импульсов $t_{\text{омн}} = 0,1$ (рисунки а), б), в)); $t_{\text{омн}} = 0,5$ (рисунки г), д), е)); $t_{\text{омн}} = 0,9$ (рисунки ж), з), и)) и периодов следования $T = 0,1\tau$ (рисунки а); г), ж)); $T = \tau$ (рисунки б), д), з)) и $T = 10\tau$ (рисунки в), е), и)).

Зависимость напряжения на резисторе от $\frac{t}{\tau}$ в установившемся режиме легко получить, зная, что во время действия импульса $U_R(t) = U_0 - U_C(t)$, а во время паузы $U_R(t) = -U_C(t)$.

Расчёт показывает, что в установившемся режиме средние значения выходных напряжений таковы $\langle U_C \rangle = U_0 \frac{T_{\text{имн}}}{T} = \frac{U_0}{Q} = \langle U_0 \rangle$, $\langle U_R \rangle = 0$, то есть постоянная составляющая напряжения на резисторе равна 0, а постоянная составляющая напряжения на конденсаторе равна постоянной составляющей напряжения с выхода генератора прямоугольных импульсов напряжения.

Работу RC-цепи в качестве интегрирующей, дифференцирующей, разделительной цепей здесь рассматривать не будем, так как эти вопросы достаточно подробно рассмотрены в литературных источниках.

Для экспериментального исследования переходных процессов в RC-цепях при подключении их к генератору прямоугольных импульсов напряжения разработан и изготовлен генератор пачек прямоугольных импульсов.

Принципиальная схема учебного стенда для исследования переходных процессов в RC-цепях приведена на рисунке 8. Генератор пачек прямоугольных импульсов напряжения состоит из двух мультивибраторов на логических элементах 2И-НЕ серии КМОП.

RC-цепи смонтированы так, что с помощью перемычек П1, П2 можно обеспечить исследование дифференцирующей или интегрирующей RC-цепи. Коэффициент отклонения осциллографа по каналам Y1, Y2 выбирают, исходя из того, что амплитуда прямоугольных импульсов напряжения равна 9 В (напряжение питания устройства).

Мультивибратор на элементах DD1.3 DD1.4 вырабатывает прямоугольные импульсы напряжения со скважностью равной 2. В этот мультивибратор входят следующие радиодетали: логические элементы элементов DD1.3, DD1.4 микросхемы DD1 K561ЛА7, конденсатора C5, резисторы R8, R9 и R10. Резистором R9 регулируется ток зарядки-разрядки конденсатора C5, т.е. регулируется частота следования импульсов.

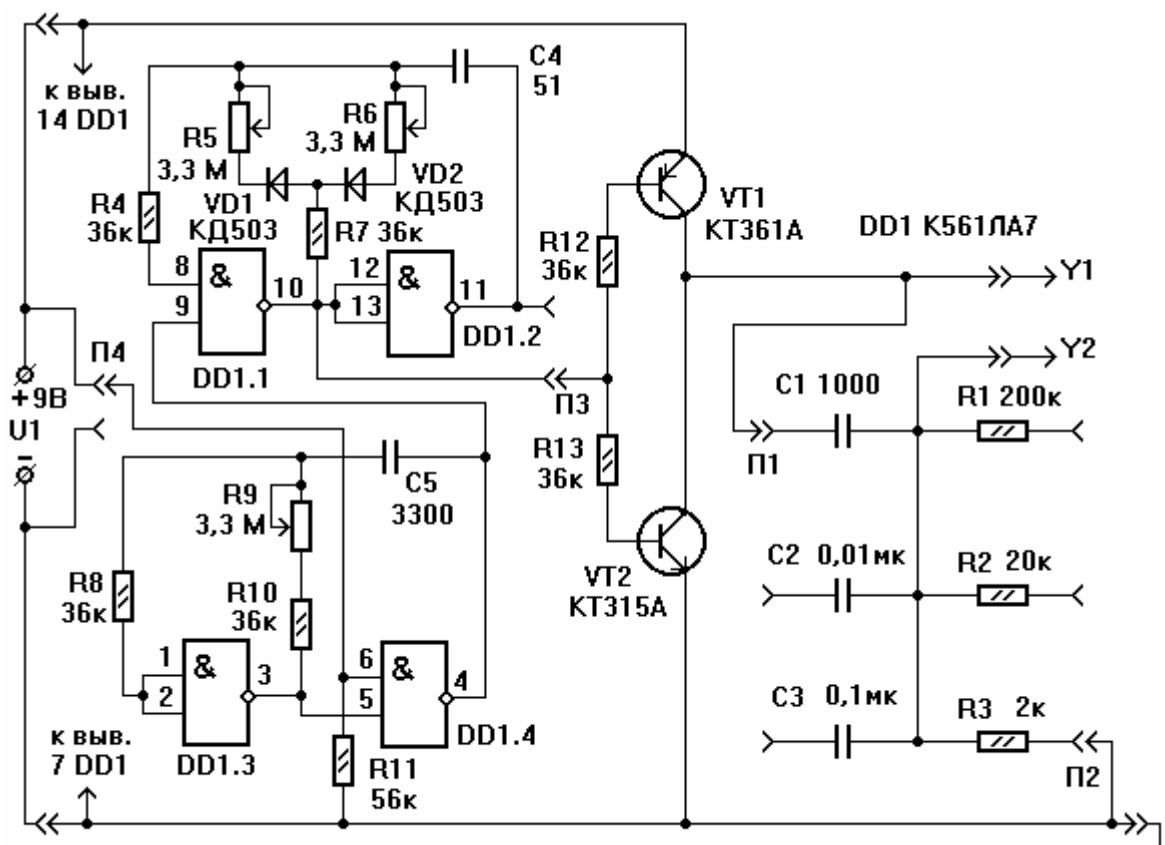


Рис. 8

Если перемычка П4 подключена к минусу источника питания, т.е. на выводе 6 элемента DD1.4 напряжение логического нуля, то на выходе элемента DD1.4 будет напряжение логической единицы. Это напряжение подается на вход элемента DD1.1, и мультивибратор на элементах DD1.1, DD1.2 работает в обычном режиме, вырабатывая непрерывную последовательность прямоугольных импульсов.

Если перемычка П4 подключена к плюсу источника питания, т.е. на выводе 6 элемента DD1.4 напряжение логической единицы и мультивибратор на элементах DD1.3, DD1.4 вырабатывает прямоугольные импульсы напряжения.

Пусть на входах 1 и 2 элемента DD1.3 только, что установилось напряжение логического нуля, тогда на выводе 3 – напряжение логической единицы и на выводе 4 – логического нуля. Конденсатор C5 заряжается по цепи: вывод 3 элемента DD1.3, резисторы R10,

R9, конденсатор C5, вывод 4 элемента DD1.4 (на выводе 4 напряжение логического нуля относительно общего провода). В этом случае резисторы R9 и R10 и конденсатор C5 можно рассматривать как интегрирующую RC-цепь. По мере зарядки конденсатора C5 потенциал левой обкладки конденсатора C5 относительно общего провода будет увеличиваться. Напряжение между левой обкладкой конденсатора и общим проводом более $U_n/2$ (4,5В) соответствует логической единице на выводах 1 и 2 элемента DD1.3 и состояние на выходе элемента DD1.3 изменится на противоположное. На выводе 4 элемента DD1.4 установится напряжение логической единицы. Так как напряжение между обкладками конденсатора мгновенно измениться не может, то потенциал левой обкладки конденсатора C4 относительно общего провода скачком увеличится на U_n и достигнет $3U_n/2$. Конденсатор C5 будет перезарядаться по цепи: вывод 4 элемента DD1.4, конденсатор C5, резисторы R9, R10, вывод 3 элемента DD1.3. В этом случае конденсатор C5 и резисторы R9, R10 можно рассматривать как дифференцирующую RC-цепь. По мере перезарядки конденсатора C5 потенциал левой обкладки конденсатора C5 относительно общего провода будет уменьшаться. Напряжение между левой обкладкой конденсатора и общим проводом менее $U_n/2$ (4,5В) будет соответствовать логическому нулю на выводах 1 и 2 элемента DD1.3. Процесс зарядки и перезарядки конденсатора C5 будет периодически повторяться.

Принцип работы мультивибратора на элементах DD1.1, DD1.2 аналогичен принципу работы мультивибратора на элементах DD1.3, DD1.4. Мультивибратор на элементах DD1.1, DD1.2 имеет 2 диода VD1, VD2 и 2 переменных резистора R5, R6 с помощью которых можно регулировать длительность импульсов в пачке и их скважность. Диоды служат для разделения направлений зарядки и перезарядки конденсатора C4.

Особенностью мультивибратора на элементах DD1.3, DD1.4 является то, что время импульса и паузы у него много больше, чем мультивибратора на элементах DD1.1, DD1.2. Если на выводе 4 мультивибратора на элементах DD1.1, DD1.2 напряжение логической единицы, то мультивибратор на элементах DD1.3, DD1.4 вырабатывает прямоугольные импульсы напряжения. Если же на выводе 4 мультивибратора на элементах DD1.1, DD1.2 напряжение логического нуля, то мультивибратор на элементах DD1.3, DD1.4 не работает.

Для увеличения крутизны фронтов прямоугольных импульсов параллельно резисторам R12, R13 можно подключить конденсаторы.

Рассмотренный стенд позволяет исследовать переходные процессы в RC-цепи как при подключении к генератору прямоугольных импульсов напряжения, так и в установившемся режиме. Если переключатель П1 подключается к одному из конденсаторов C1, C2, C3, а переключатель П2 - к одному из резисторов R1, R2, R3, то исследуется дифференцирующая RC-цепь. Если переключатель П1 подключается к одному из резисторов R1, R2, R3, а переключатель П2 - к одному из конденсаторов C1, C2, C3, то исследуется интегрирующая RC-цепь.

При исследовании дифференцирующей RC-цепи на экране осциллографа наблюдаются импульсы как положительной, так и отрицательной полярности.